

Geometrija 3, školska 2013/14.

Rešenja kolokvijuma

1. (a) Skicirati slike sledećih krivih i ispitati njihovu regularnost: $\rho = -\theta$, ($\theta > 0$); $(2 \cos t, 3t, 2 \sin t)$, ($t \in \mathbb{R}$).
- (b) Skicirati slike sledećih površi i ispitati njihovu regularnost: $(\operatorname{sh} u, u, v)$, $((u, v) \in \mathbb{R}^2)$; $(\cos u \cos v, \cos u \sin v, 2 \sin u)$, $(u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), v \in (0, 2\pi))$.

Rešenje. Direktno se proverava da su obe krive i obe površi regularne.

- (a) Kriva $\rho = -\theta$ ($\theta > 0$) je Arhimedova spirala, i to "leva" (uvija u drugom smeru od standardne) zbog predznaka minus.
Kriva $(2 \cos t, 3t, 2 \sin t)$, ($t \in \mathbb{R}$), je desni kružni heliks koji leži na cilindru čija je osnova krug poluprečnika 2, a osa je y -osa.
- (b) Površ $(\operatorname{sh} u, u, v) = (\operatorname{sh} u, u, 0) + v(0, 0, 1)$, $((u, v) \in \mathbb{R}^2)$, je cilindrična površ čija je osnova kriva $x = \operatorname{sh} y$ u ravni $z = 0$, a generatrise su prave paralelne z -osi.
Površ $(\cos u \cos v, \cos u \sin v, 2 \sin u)$, $(u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), v \in (0, 2\pi))$, predstavlja parametrizaciju elipsoida $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ (bez jedne poluelipse u xz -poluravni, $x > 0$) kao rotacione površi.

2. Dokazati da je jedina ravanska kriva čija je označena krivina $\kappa_z(s) = \frac{-1}{1+s^2}$ lančanica.

Rešenje. Neka je $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ prirodno parametrizovana kriva sa tangentnim vektorom $T(s)$ i normalnim vektorom $N(s)$. Ako je $\theta(s)$ ugao koji vektor $T(s)$ zaklapa sa pozitivnim delom x -ose, važi $T(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$, $N(s) = (-\sin \theta(s), \cos \theta(s))$. Kako je $T(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$, dobijamo

$$x(s) = \int \cos \theta(s) ds, \quad y(s) = \int \sin \theta(s) ds.$$

Iz Freneove formule $T'(s) = \kappa_z(s)N(s)$ i jednakosti $T'(s) = (-\sin \theta(s)\theta'(s), \cos \theta(s)\theta'(s))$ dobijamo

$$\theta'(s) = \kappa_z(s) \implies \theta(s) = \int \kappa_z(s) ds.$$

Dakle, kriva α čija je označena krivina $\kappa_z(s)$ data je (do na izometrijsku transformaciju prostora $\mathbb{E}^2$) formulom

$$\alpha(s) = \left(\int \cos \left(\int \kappa_z(s) ds \right) ds, \int \sin \left(\int \kappa_z(s) ds \right) ds \right).$$

Naravno, možemo posmatrati i integrale sa pogodno odabranom fiksiranom donjom granicom s_0 . U našem

konkretnom slučaju dobijamo $\theta(s) = \int_0^s \frac{-1}{1+u^2} du = -\arctg s$, pa je

$$x(s) = \int_0^s \cos(-\arctg u) du = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \ln(s + \sqrt{1+s^2}),$$

$$y(s) = \int_0^s \sin(-\arctg u) du = \int_0^s \frac{-u}{\sqrt{1+u^2}} du = 1 - \sqrt{1+s^2}.$$

Kriva $\alpha(s) = (\ln(s + \sqrt{1+s^2}), 1 - \sqrt{1+s^2})$ je prirodno parametrizovana lančanica $\alpha(t) = (1 - t, \operatorname{ch} t)$.

S obzirom na Osnovnu teorem o krivama u euklidskoj ravni, mogli smo da postupimo obrnuto. Naime, ako krenemo od proizvoljne lančanice

$$\beta(t) = \left(-t, a \operatorname{ch} \frac{t}{a} \right), \quad a > 0,$$

(sa suprotnom orijentacijom od standardne zbog negativne označene krivine) i parametrizujemo je dužinom luka

$$\beta(s) = a(\operatorname{arsh} s, \sqrt{1+s^2}) = a(-\ln(s + \sqrt{1+s^2}), \sqrt{1+s^2}),$$

dobijamo da je njena označena krivina $\kappa_z(s) = \frac{-a}{1+s^2}$. Pogodno odabrana konstanta $a = 1$ daje krivu koja ima označenu krivinu baš jednaku datoj. Primetimo da ova kriva β predstavlja krivu α transliranu za vektor $(1, 0)$, što se opravdava činjenicom da označena krivina određuje ravnsku krivu jedinstveno, ali do na direktnu izometriju euklidske ravni.

3. Data je kriva $\gamma(t) = e^t(\frac{1}{2}(\sin t + \cos t), \frac{1}{2}(\sin t - \cos t), 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Odrediti prirodnu parametrizaciju, Freneov reper, krivinu i torziju krive γ .

Rešenje. Odredićemo tražene veličine koristeći i datu i prirodnu parametrizaciju. Za ovako parametrizovanu krivu, zbog osobina eksponencijalne funkcije, zgodno je odabrati tačku $t = -\infty$ za onu od koje računamo dužinu luka.

- vektor brzine: $\gamma'(t) = e^t(\cos t, \sin t, 1)$;
- brzina: $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^t$;
- funkcija dužine luka: $s(t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{2}e^u du = \sqrt{2}e^u|_{-\infty}^t = \sqrt{2}e^t \implies t = \ln \frac{s}{\sqrt{2}}, s > 0$;
- prirodna parametrizacija: $\gamma(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \left(\sin \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right) + \cos \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right), \frac{1}{2} \left(\sin \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right) - \cos \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \right), 1 \right)$;
- tangentni vektor: $T(s) = \gamma'(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \sin \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right), 1 \right)$,
 $T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1)$;
- krivina: $\gamma''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}s} \left(-\sin \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \cos \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right), 0 \right)$,
 $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2}s}$, $\kappa(t) = \frac{1}{2e^t}$;
- normalni vektor: $N(s) = \left(-\sin \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right), \cos \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right), 0 \right)$,
 $N(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$;
- binormalni vektor: $B(s) = T(s) \times N(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\cos \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right), -\sin \left(\ln \frac{s}{\sqrt{2}} \right), 1 \right)$,
 $B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t, -\sin t, 1)$;
- torzija: $\tau(s) = -\langle B'(s), N(s) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}s}$, $\tau(t) = \frac{1}{2e^t}$;

4. Dokazati da je prirodno parametrizovana kriva α klase C^4 , sa krivinom i torzijom različitom od nule, uopšteni heliks ako i samo ako važi $[\alpha'', \alpha''', \alpha^{IV}] = 0$.

Rešenje. Koristeći Freneove formule dobijamo

$$\begin{aligned}\alpha'' &= T' = \kappa N, \\ \alpha''' &= \kappa' N + \kappa N' = -\kappa^2 T + \kappa' N + \kappa \tau B, \\ \alpha^{IV} &= -2\kappa\kappa' T - \kappa^2 T' + \kappa'' N + \kappa' N' + (\kappa'\tau + \kappa\tau')B + \kappa\tau B' \\ &= -3\kappa\kappa' T + (-\kappa^3 - \kappa\tau^2 + \kappa'')N + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')B.\end{aligned}$$

Kako je Freneova baza ortonormirana, imamo

$$\begin{aligned}[\alpha'', \alpha''', \alpha^{IV}] &= (-3\kappa^3\kappa'\tau)[N, B, T] - \kappa^3(2\kappa'\tau + \kappa\tau')[N, T, B] \\ &= -3\kappa^3\kappa'\tau + \kappa^3(2\kappa'\tau + \kappa\tau') = \kappa^3(\kappa\tau' - \kappa'\tau) \\ &= \kappa^5 \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)' .\end{aligned}$$

Sada lako dobijamo da je uslov zadatka ekvivalentan sa $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' = 0$, odnosno $\frac{\tau}{\kappa} = \text{const}$, pa samim tim i $\frac{\kappa}{\tau} = \text{const}$, što je jedna od karakterizacija uopštenog heliksa.

5. Dokazati da je elementarna površ $f(s, t) = (a(s+t), bt, s^2 + 2st)$, $s, t \in \mathbb{R}$, pravolinijska površ čija je slika ceo hiperbolički paraboloid $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. Odrediti jednačinu tangentne ravni u tački $(2a, b, 3)$.

Rešenje. Kako je

$$f(s, t) = (as, 0, s^2) + t(a, b, 2s),$$

površ f je pravolinijska površ čija je direktrisa parabola $(as, 0, s^2)$, a generatrise su prave čiji je vektor pravca $(a, b, 2s)$. Lako se proverava da za $x = a(s+t)$, $y = bt$, $z = s^2 + 2st$ važi $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, pa ostaje da dokažemo da je na ovaj način pokriven ceo paraboloid. Zaista,

$$t = \frac{y}{b}, \quad s = \frac{x}{a} - t = \frac{x}{a} - \frac{y}{b},$$

daje dovoljan argument da je svaka tačka $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ u bijektivnoj korespondenciji sa tačno jednom tačkom $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pravac normale tangentne ravni je vektor

$$f_s \times f_t = (a, 0, 2s + 2t) \times (a, b, 2s) = (-2b(s+t), 2at, ab).$$

Tački $(2a, b, 3)$ na paraboloidu odgovaraju vrednosti parametara $s = t = 1$, pa je pravac normale u toj tački $(-4b, 2a, ab)$. Jednačina tangentne ravni dobija se iz $\langle (x - 2a, y - b, z - 3), (-4b, 2a, ab) \rangle = 0$ i glasi

$$-4bx + 2ay + abz + 3ab = 0.$$

Kako znamo implicitni oblik jednačine ove površi $F(z, y, z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$, moguće je pravac normale naći kao $\nabla F(x, y, z) = (\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}, -1)$. Pravac normale u tački $(2a, b, 3)$ je vektor $(\frac{4}{a}, -\frac{2}{b}, -1)$, koji je kolinearan sa prethodno dobijenim vektorom $(-4b, 2a, ab)$.

6. Data je elementarna površ $r(u, v) = (\cos^3 u \cos v, \cos^3 u \sin v, \sin^3 u)$, $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $v \in (0, 2\pi)$. Odrediti uglove, obim i površinu krivolinijskog četvorougla ograničenog krivama $u = \frac{\pi}{4}$, $u = \frac{\pi}{3}$, $v = \frac{\pi}{3}$, $v = \frac{\pi}{2}$ na površi.

Rešenje. Koeficijenti prve fundamentalne forme date površi su

$$\begin{aligned} r_u &= (-3 \sin u \cos^2 u \cos v, -3 \sin u \cos^2 u \sin v, 3 \sin^2 u \cos u), \\ r_v &= (-\cos^3 u \sin v, \cos^3 u \cos v, 0), \\ E &= \langle r_u, r_u \rangle = 9 \sin^2 u \cos^2 u, \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = 0, \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle = \cos^6 u, \end{aligned}$$

odnosno važi

$$[I] = \begin{pmatrix} 9 \sin^2 u \cos^2 u & 0 \\ 0 & \cos^6 u \end{pmatrix}$$

Kako je $F = 0$ na celoj površi, koordinatne linije su međusobno normalne. Stranice datog krivolinijskog četvorougla su upravo koordinatne linije $u = \frac{\pi}{4}$, $u = \frac{\pi}{3}$, $v = \frac{\pi}{3}$, $v = \frac{\pi}{2}$, pa su svi njegovi uglovi pravi. Napomenimo da to što je ovaj četvorougao slika pravougaonika iz karte nije dovoljno da se izvede zaključak o pravim unutrašnjim uglovima (za tako nešto bi bilo neophodno da su date koordinate konformne, što nije slučaj zbog $E \neq G$).

Površina datog krivolinijskog četvorougla iznosi

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \iint_{[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] \times [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]} \sqrt{EG - F^2} = 3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin u \cos^4 u \, du, \\ \mathcal{P} &= \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^4 \, dt = \frac{(4\sqrt{2} - 1)\pi}{320}. \end{aligned}$$

Stranice četvorougla date su sa

$$\begin{aligned} \alpha(v) &= r\left(\frac{\pi}{4}, v\right), \quad v \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right], & \beta(u) &= r\left(u, \frac{\pi}{3}\right), \quad u \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right], \\ \gamma(v) &= r\left(\frac{\pi}{3}, v\right), \quad v \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right], & \delta(u) &= r\left(u, \frac{\pi}{2}\right), \quad u \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$

Brzine krivih dobijaju se iz sledećih jednakosti

$$\|\alpha'\|^2 = I(\alpha', \alpha') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8},$$

$$\|\beta'\|^2 = \mathbf{I}(\beta', \beta') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \sin^2 u \cos^2 u & 0 \\ 0 & \cos^6 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 \sin^2 u \cos^2 u,$$

$$\|\gamma'\|^2 = \mathbf{I}(\gamma', \gamma') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{27}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{64} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{64},$$

$$\|\delta'\|^2 = \mathbf{I}(\delta', \delta') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \sin^2 u \cos^2 u & 0 \\ 0 & \cos^6 u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 9 \sin^2 u \cos^2 u,$$

pa obim četvorougla iznosi

$$\mathcal{O} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2}} dv + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \sin u \cos u du + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} dv + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \sin u \cos u du$$

$$\mathcal{O} = \frac{\sqrt{2}\pi}{24} + \frac{\pi}{48} + \frac{3}{4}.$$